ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT

1. *Les candidats sont invités à respecter scrupuleusement les notations de l'énoncé. Par ailleurs, la clarté et la précision des démonstrations, ainsi que le soin apporté à la rédaction, joueront un rôle dans l'appréciation de chaque copie.*

2. *Les parties* I *et* II *ont pour objet d'établir quelques résultats préliminaires, dont certains sont utilisés dans la partie* III.

I

Si v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes v_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on rappelle que l'application :

$$|\bullet| : v \in \mathbb{R}^n \to |v| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1° Si A est une matrice réelle d'ordre n, on pose :

$$\| A \| = \sup \{ \, | Av | ; v \in \mathbb{R}^n, | v | = 1 \}$$

Calculer $\| A \|$ en fonction des éléments a_{ij} (i : indice de ligne, j : indice de colonne) de la matrice A.

2° On dit qu'une matrice A est *positive* si tous ses éléments sont $\geqslant 0$; en particulier un vecteur v est *positif* si toutes ses composantes sont $\geqslant 0$. On note alors

$$A \geqslant 0, v \geqslant 0$$

respectivement. Par ailleurs, on dit qu'une matrice carrée réelle est *monotone* si elle est inversible et si la matrice A^{-1} est positive.

Montrer qu'une matrice réelle d'ordre n est monotone si et seulement si l'inclusion :

$$\{ v \in \mathbb{R}^n ; Av \geqslant 0 \} \subset \{ v \in \mathbb{R}^n ; v \geqslant 0 \}$$

est satisfaite.

Tournez la page S. V. P.

1 8 1 ENS ULM SEVRES 84

II

On désigne par $\mathcal{C}^m(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles m fois continûment dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, m entier $\geqslant 0$. Par ailleurs, on note f', f'', et $f^{(n)}$ pour $n \geqslant 3$, les dérivées successives d'une fonction f d'une variable réelle.

On considère le problème suivant : étant donné deux fonctions $a \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $b \in \mathcal{C}^0([0,1])$, trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1])$ qui vérifie :

$$(P) \qquad \begin{cases} -\varphi''(x) + a(x)\varphi(x) = b(x), \ 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Un tel problème est appelé *problème aux limites*, car la fonction inconnue φ doit satisfaire les *conditions aux limites* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

3° Discuter l'existence et l'unicité de la solution du problème (P) dans le cas particulier où les fonctions a et b sont des *constantes*, qu'on désignera dans ce cas, *et dans ce cas seulement*, par α et β. Résumer les résultats sous forme d'un *tableau*.

4° On suppose la fonction $a \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Montrer que, si une fonction $\theta \in \mathcal{C}^0([0,1]) \cap \mathcal{C}^2(]0,1[)$ vérifie :

$$\begin{cases} -\theta''(x) + a(x)\theta(x) \geqslant 0, \ 0 < x < 1, \\ \theta(0) \geqslant 0, \ \theta(1) \geqslant 0, \end{cases}$$

alors elle est $\geqslant 0$ sur l'intervalle $[0,1]$. Pour cela, on commencera par montrer que la fonction :

$$\theta_\varepsilon : x \in [0,1] \to \theta_\varepsilon(x) = \theta(x) + \frac{\varepsilon}{2} x(1-x)$$

est $\geqslant 0$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

5° En déduire que le problème (P) a au plus une solution lorsque $a \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0,1]$.

III

Dans toute la suite, on suppose la fonction $a \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On démontre alors *l'existence* d'une solution φ du problème (on ne cherchera pas à établir ce résultat).

L'objet du problème est *l'étude d'un procédé d'approximation de la solution φ du problème* (P).

Étant donné un entier $n \geqslant 1$, on pose $h = \dfrac{1}{n+1}$, et on définit les $(n+2)$ points

$$x_i = i\,h, \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1$$

Par ailleurs on pose, pour alléger l'écriture :

$$\varphi_i = \varphi(x_i), \quad a_i = a(x_i), \quad b_i = b(x_i)$$

6° Étant donné une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$, montrer qu'il existe des nombres η_i tels que :

$$-\varphi''(x_i) = \frac{-\varphi_{i-1} + 2\varphi_i - \varphi_{i+1}}{h^2} + \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \eta_i h),$$

$$|\eta_i| < 1, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

En déduire l'égalité :

$$A_h \varphi_h = b_h + \varepsilon_h(\varphi)$$

où la matrice A_h d'ordre n et les vecteurs φ_h, b_h, $\varepsilon_h(\varphi)$ de $\mathbb{R}^n$ ont respectivement pour expressions :

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 + a_1 h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + a_2 h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 + a_{n-1} h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2 + a_n h^2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_h = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad b_h = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_h(\varphi) = -\frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} \varphi^{(4)}(x_1 + \eta_1 h) \\ \varphi^{(4)}(x_2 + \eta_2 h) \\ \vdots \\ \varphi^{(4)}(x_{n-1} + \eta_{n-1} h) \\ \varphi^{(4)}(x_n + \eta_n h) \end{pmatrix}$$

On définit le *problème discret associé au nombre* $h = \dfrac{1}{n+1}$: trouver un vecteur $u_h \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$(P_h) \qquad A_h u_h = b_h$$

De façon imagée, on « néglige » le vecteur $\varepsilon_h(\varphi)$.

7° Démontrer que la matrice A_h est monotone.

Indication : On pourra commencer par considérer le cas où tous les nombres a_i sont > 0.

8° On définit la matrice d'ordre n :

$$A_{oh} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que :

$$\|A_h^{-1}\| \leqslant \|A_{oh}^{-1}\|.$$

9° On note e_h le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes valent 1. Trouver, *avec un minimum de calculs,* les composantes du vecteur v_h solution de :

$$A_{oh} v_h = e_h.$$

Tournez la page S. V. P.

10° Établir la majoration :

$$\| A_{oh}^{-1} \| \leqslant \frac{1}{8}.$$

11° On suppose que la solution φ du problème (P) vérifie $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$. Démontrer l'existence d'une constante $\mathcal{C}$, qu'on explicitera, telle que :

$$| u_h - \varphi_h | = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | u_i - \varphi(x_i) | \leqslant \mathcal{C} h^2$$

Remarque : La majoration ci-dessus établit donc la *convergence* du procédé d'approximation envisagé lorsque $h = \frac{1}{n+1}$, n entier $\geqslant 1$, tend vers zéro, en ce sens que

$$\lim_{h \to 0} | u_h - \varphi_h | = 0.$$

12° A-t-on encore $\lim_{h \to 0} | u_h - \varphi_h | = 0$ lorsque la solution φ vérifie seulement $\varphi \in \mathcal{C}^3([0,1])$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail